



Walras et le tâtonnement : Gauss-Seidel ou ... Lagrange ?

Emeric Lendjel

► To cite this version:

Emeric Lendjel. Walras et le tâtonnement : Gauss-Seidel ou ... Lagrange ?. *Œconomia - History/Methodology/Philosophy*, 2001, série PE (35), pp.1627-1655. halshs-00515345

HAL Id: halshs-00515345

<https://shs.hal.science/halshs-00515345>

Submitted on 6 Sep 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Walras et le tâtonnement : Gauss-Seidel ou ... Lagrange ?

Walras and the tâtonnement : Gauss-Seidel or ... Lagrange ?

Emeric LENDJEL*

Centre Walras-Pareto, Université de Lausanne

RESUME

Cet article répond à une lacune dans l'historiographie walrassienne. De nombreux auteurs s'accordent sur le caractère mathématique du tâtonnement chez Walras, mais sans lui donner une forme mathématique précise. Cet article montre ainsi que Walras se sert de la méthode de Lagrange qu'il identifie au tâtonnement. Il s'agit d'une méthode itérative de résolution d'équation assez répandue au début du XIXème siècle. Grâce à cette méthode, Walras démontre que le mécanisme de la concurrence parvient "pratiquement", par tâtonnements, aux mêmes solutions d'équilibre que celles établies par le théoricien lors de la résolution du système d'équations. Cet article tente ensuite de corroborer cette interprétation en montrant que Cournot utilise cette même méthode à propos du monopole. Enfin, une série d'arguments est avancée afin d'écarter une hypothèse alternative développée par Uzawa [1960] : celle de l'utilisation par Walras de la méthode de Gauss-Seidel.

Mots clefs : Walras - tâtonnement - méthodes itératives - méthode de Lagrange - méthode de Gauss-Seidel

ABSTRACT

This paper attempts to fill a gap in the walrasian historiography. Many scholars accord with the mathematical character of Walras' tâtonnement, but without attributing to it a precise mathematical form. Thus, this article shows that Walras did use of the Lagrange's method which he identified with his tâtonnement. This is an iterative method of resolution of equation which was widely known at the beginning of the nineteenth century. Thanks to this method, Walras demonstrates that mechanism of competition leads "in practice", by tâtonnements, to the same equilibrium solution as the one established by the theoretician when solving the system of equations. Then this interpretation is corroborated by the fact that Cournot did use the same method when dealing with the monopolistic situation. Finally, several arguments are put forth in order to disprove Uzawa's alternate hypothesis : namely, Walras' use of the Gauss-Seidel method.

Keywords : Walras - tâtonnement - iteratives methods - Lagrange's method - Gauss-Seidel's method

Introduction

Récemment, Donald Walker développait, dans un ouvrage intitulé *Walras' Market Models* (1996), une analyse qui tendait à nier la dimension mathématique du tâtonnement dans les écrits de Walras (Walker [1996], p. 184; DeVroey [1999]). Il confirmait en cela une prise de position, exprimée en 1988, qui contestait l'identification du tâtonnement avec une méthode itérative de résolution d'un système d'équations (Walker [1988]). Pourtant, de nombreux passages semblent témoigner du contraire. En effet, Walras mobilise explicitement le tâtonnement pour démontrer que le mécanisme de la concurrence parvient "pratiquement" aux mêmes solutions d'équilibre que celles établies par le théoricien lors de la résolution du système d'équations. Il s'agit donc avant tout, à ses yeux, d'un procédé démonstratif, qui répond à une question que l'on ne se posait pas avant la formalisation de l'équilibre général : comment prouver que le mécanisme de la concurrence trouve les prix et quantités d'équilibre dont on a déterminé l'existence théorique ? La réponse de Walras consiste à montrer que le mécanisme économique de la concurrence correspond, terme à terme, à une méthode itérative de résolution numérique des équations. Comme il l'affirme explicitement dès sa préface,

"le mécanisme de la hausse et de la baisse des prix sur le marché [...] n'est rien autre chose qu'un *mode de résolution par tâtonnement des équations*" (Walras [1889] in [1988], p. 16, nos italiques)¹.

Nous défendrons donc ici une interprétation opposée à celle de Walker selon laquelle il existe bien une correspondance, terme à terme, entre le tâtonnement et une méthode mathématique². Nous empruntons en cela le chemin tracé par Goodwin ([1951], p. 5), Jaffé ([1981], p. 260) et Lotter ([1985], pp. 122-123) consistant à prendre au mot les affirmations réitérées de Walras à propos du "mécanisme de la hausse et de la baisse" caractérisant la libre concurrence.

Mais cette thèse se heurte à une grande inconnue dans l'historiographie walrassienne. A quelle méthode mathématique peut-on identifier le tâtonnement walrassien ? Si la méthode de Gauss-Seidel a été souvent évoquée (Uzawa [1960], p. 186, n. 1, Arrow et Hahn [1971], pp. 305-306, D'Autume [1982], pp. 115-118), elle a également été critiquée (Walker [1987], [1988]). Pour notre part, nous pensons pouvoir mettre un nom sur cette inconnue en proposant une méthode assez répandue au début du XIX^{ème} siècle : la méthode de Lagrange. Nous montrerons que, grâce à cette méthode, Walras peut, à chacune des étapes de ses *Eléments d'Economie Politique Pure* (1874), se servir du tâtonnement comme un procédé démonstratif destiné à garantir que la résolution théorique des équations peut également se faire dans la "pratique", sur les marchés³.

Si l'on souhaite donc mettre en lumière le caractère mathématique du tâtonnement walrassien, il faut aborder principalement trois points. Tout d'abord, nous avons montré ailleurs (Lendjel [1998], pp. 30-40) que, pour Walras, l'application des mathématiques à l'économie passe par la mise en correspondance - terme à terme - de chaque objet mathématique avec un référent économique. Par conséquent, si le tâtonnement est une méthode mathématique, on doit pouvoir trouver, dans les *Eléments*, son référent économique.

Nous allons voir que ce référent économique susceptible de correspondre à une méthode mathématique de résolution s'avère être le mécanisme de la concurrence. En effet, le tâtonnement est systématiquement associé, au moins dans les *Eléments*, au "mécanisme de la hausse et de la baisse", ou, en d'autres termes, à la libre concurrence. Il nous faut donc avant tout présenter ce mécanisme afin de voir comment Walras l'identifie à une méthode mathématique. **(1. La concurrence comme référent économique du tâtonnement)**. Après avoir décrit ce mécanisme, il nous faut ensuite montrer qu'il connaît une méthode de résolution numérique d'équations susceptible d'être mis en correspondance avec ce référent économique et que son exposé du tâtonnement se conforme à cette méthode. C'est ce que nous établirons dans un deuxième temps **(2. Le tâtonnement et la méthode de Lagrange)**. Enfin, il importe d'écarter l'hypothèse alternative de l'emploi par Walras de la méthode de Gauss-Seidel. Ainsi, dans un troisième temps, nous situerons avec Cournot l'origine de l'utilisation de cette méthode en économie afin de montrer que Walras ne pouvait avoir connaissance, à cette époque, de la méthode développée par Seidel **(3. Cournot ou Seidel ?)**.

I. La concurrence comme référent économique du tâtonnement

La conception walrassienne de la concurrence s'enracine dans un apparent paradoxe entre la liberté ontologique des agents et le caractère mécanique de leurs actions économiques.

Pour Walras, les hommes, animés d'une "volonté libre et clairvoyante", cherchent à s'approprier les choses rares et échangeables. Cette appropriation donne lieu à un "fait humanitaire", pour Walras, au sens où

"il a son origine dans l'exercice de la volonté et de l'activité humaine et non dans celui des forces de la nature" (Walras [1874] *in* [1988], § 35, p. 61).

A partir de cette activité libre, les marchandises s'échangent en raison d'une valeur d'échange qui, par contre, est un "fait naturel" (*ibid.*, § 28, p. 50), c'est-à-dire résultant de "forces aveugles et fatales" (*ibid.*, § 17, p. 39). Dans la mesure où cette valeur d'échange provient de l'activité humaine, par définition libre et clairvoyante, comment peut-elle devenir "naturelle" ? Le paradoxe est bien connu, mais il est nécessaire, pour notre propos, de rappeler comment Walras le résout.

En fait, la clef de ce paradoxe réside dans la conception que se donne Walras de la concurrence. Pour ce dernier, la concurrence provient de l'activité des hommes. Face à des marchandises rares, c'est-à-dire utiles et disponibles en quantité limitée, les hommes doivent se faire concurrence pour se les approprier. La concurrence est donc avant tout, pour Walras, un comportement qui se manifeste lors du marchandage préalable à l'échange. Puisque toutes les marchandises sont appropriées, tout échange suppose que "l'acheteur d'une chose est vendeur de celle qu'il donne en échange" (*ibid.*, § 41, p. 70). Pour s'approprier une marchandise, l'acheteur doit en céder une autre. Chaque agent effectue ainsi deux actes. Puisqu'un échange suppose deux agents,

"tout échange de deux choses l'une contre l'autre se compose d'une double vente et d'un double achat" (*ibid.*).

Cependant, pour que la transaction se réalise, il faut que les agents soient d'accords sur le rapport d'échange. Or, rien ne prédestine *a priori* qu'une marchandise s'échange dans un rapport déterminé contre une autre. Chaque agent doit donc proposer d'échanger sa marchandise dans une proportion donnée contre une autre. Encore une fois, rien n'indique *a priori* que la valeur d'échange proposée par le premier agent soit la même que celle proposée par le second. En effet, chaque agent présente, au départ, un taux d'échange qui lui est favorable. En raison de l'écart entre ces deux propositions, une négociation - un marchandage - doit s'instaurer. C'est dans la négociation d'un taux d'échange acceptable pour les deux parties que vont se manifester les comportements concurrentiels des agents.

Pour Walras, l'achat et la vente produisent deux types de comportement :

"[c]omme acheteurs, les échangeurs *demandent à l'enchère*, comme vendeurs, ils *offrent au rabais*" (*ibid.*).

Plus précisément, ces deux comportements ne se manifestent qu'en cas de refus de l'échange. Faute de vendeur (d'acheteur), l'acquéreur (vendeur) est obligé de proposer un rapport d'échange qui lui est moins favorable que celui qu'il propose initialement. Le vendeur, par exemple, offre de céder sa marchandise en échange d'une quantité moindre d'une autre. Inversement, l'acheteur propose de sacrifier une quantité plus importante de la marchandise qu'il détient pour obtenir la chose qu'il convoite. Les comportements d'enchère et de rabais de l'individu sont donc motivés par l'absence de "contrepartie", c'est-à-dire, d'un partenaire acceptant la transaction proposée. Ils n'agissent à l'enchère ou au rabais qu'en cas de refus de leur proposition. Or, qu'est-ce qui peut motiver un tel refus de la part de l'autre agent ? De deux choses l'une, soit l'agent juge cette proposition trop différente de la sienne, ou trop injuste, soit l'agent trouve ailleurs, avec un autre échangiste, une proposition qui lui est plus avantageuse. Dans les deux cas, le premier agent est obligé de modifier son offre s'il souhaite pouvoir trouver une contrepartie. Les agents ne vont à l'enchère ou au rabais que lorsqu'ils ne trouvent personne pour accepter leurs propositions, autrement dit, lorsqu'ils se trouvent "du côté long"⁴. En ce sens, puisque les agents sont obligés d'aller à l'enchère ou au rabais s'ils souhaitent poursuivre la négociation, leurs réactions deviennent aussi mécaniques que s'ils étaient soumis aux forces aveugles et fatales de la nature (Berthoud [1988], p. 74). Ainsi, en examinant les comportements d'enchère et de rabais des agents, on constate que

"leur concours amène ainsi une certaine valeur d'échange des marchandises tantôt ascendante, tantôt descendante et tantôt stationnaire" (Walras [1874] *in* [1988], § 41, p. 70).

Il s'agit, aux dires de Walras, d'un mécanisme dont le résultat est d'imposer le caractère naturel de la valeur d'échange (*ibid.*).

Walras souligne à de nombreuses reprises que la concurrence s'apparente à un mécanisme, celui "de la hausse et de la baisse"⁵. Si la concurrence est un "mécanisme", elle

peut elle-même s'apparenter à un "fait naturel" qui s'impose aux volontés humaines, une fois que ces dernières ont organisé le marché. Et, de fait,

"le mécanisme de la libre concurrence est, à certaines conditions et dans certaines limites, un mécanisme automoteur et autorégulateur" (Walras [1889] *in* [1988], § 264, p. 425).

Ainsi, la hausse et la baisse, qui résultent des comportements concurrentiels des agents, constituent des phénomènes parfaitement réguliers et mécaniques, susceptibles d'être mis en correspondance avec un objet mathématique (Berthoud [1988], p. 74). Or, nous pensons que c'est précisément l'objet du tâtonnement. Selon Walras, comme nous le verrons par la suite, "une méthode de résolution par tâtonnement des équations d'égalité de l'offre et de la demande totales" peut être "fondée" sur le mécanisme de la concurrence (Walras [1874] *in* [1988], § 126, p. 188). En ce sens, le propos de Walras consiste, avec le tâtonnement, à démontrer que les comportements concurrentiels des agents peuvent déterminer "pratiquement" un prix d'équilibre - et donc simultanément des quantités échangées - qui aura les caractéristiques d'un fait naturel. Walras entend ainsi démontrer mathématiquement qu'à partir des comportements individuels, qui s'expriment à travers la hausse et la baisse, le marché résout par lui-même les équations de l'échange⁶.

Il importe alors ici de retenir, dans l'immédiat, que la concurrence entre les individus produit des effets - la hausse et la baisse - qui sont observables sur n'importe quel marché. Partout, son mécanisme s'impose, que ce soit sur les "marchés aux fruits et légumes, à la volaille", dans

"les rues d'une ville où se trouvent des magasins et des boutiques de boulangers, de bouchers, d'épiciers, de tailleurs, de bottiers, [qui] sont des marchés d'une organisation un peu plus défectueuse sous le rapport de la concurrence, mais où cependant elle se fait très suffisamment sentir" (*ibid.*, § 41, pp. 70-71).

Si la concurrence s'impose partout, pourquoi faut-il qu'elle soit "organisée", pour Walras ? Pour ce dernier, la réponse est simple. Walras, imprégné des idéaux de la Révolution française de 1789, estime que les hommes sont libres et doivent agir librement (Lallement [1990]). Il faut donc faire en sorte que leur humanité puisse s'exprimer le plus parfaitement possible (Berthoud [1988], p. 72). Pour cela, les comportements d'enchère et de rabais - l'expression de cette humanité - doivent pouvoir se manifester sans entraves. Or, cette libre expression des comportements concurrentiels ne va pas de soi. Ces comportements ne pourront librement s'exprimer si une tutelle est exercée sur les taux d'échanges (Walras [1889] *in* [1988], § 373, p. 657), ou si un agent se trouve en situation de monopole (Walras [1874] *in* [1988] *ibid.* § 377, p. 660). Il faut donc "organiser" les marchés de manière à favoriser la pleine expression du mécanisme de la hausse et de la baisse⁷. Ce faisant, la machine concurrentielle pourra fonctionner parfaitement, sans "frottement" (*ibid.*, § 41, p. 71).

L'essentiel de la description des marchés organisés "sous le rapport de la libre concurrence" figure dans les paragraphes 41 et 42 de la 5^e leçon des *Eléments*⁸. Nous pouvons

en dégager les principaux éléments nécessaires à l'expression du mécanisme de libre concurrence. Ce sont 1/ les comportements d'enchères et de rabais des agents qui se font lorsqu'ils se trouvent du "côté long"; 2/ l'unicité du prix d'un bien donné à tout instant de la procédure de détermination du prix d'équilibre; 3/ la centralisation des informations par des courtiers, crieurs et autres intermédiaires, pour chaque marché; 4/ le regroupement de tous les marchés en un seul endroit; 5/ le caractère aléatoire du premier prix crié sur le marché; 6/ la fin de la procédure en cas d'égalité des offres et des demandes au prix en vigueur sur tous les marchés; 7/ la suspension de tout échange effectif avant la fin de la procédure. Cette dernière clause est importante car elle implique la réversibilité de tout engagement d'un agent en cas de nouveau prix. Il s'agit là d'un ensemble de règles, de procédures et de dispositifs organisationnels nécessaires au mécanisme de la libre concurrence.

Nous avons vu que Walras concevait la concurrence comme un comportement qui peut se ramener au simple mécanisme de la hausse et de la baisse. En d'autres termes, les agents ne réagissent que lorsqu'ils se situent "du côté long", en allant à l'enchère ou au rabais. Ce mécanisme s'exprime parfaitement sur des marchés organisés "sous le rapport de la concurrence". Ces dispositifs organisationnels constituent des conditions nécessaires à l'expression pleine et entière de la liberté humaine. De notre point de vue, il ressort que, sous ces conditions, la concurrence s'apparente à une loi qui peut être mise en correspondance avec un objet mathématique qu'il s'agit dorénavant de préciser.

II. Le tâtonnement et la méthode de Lagrange

Pour démontrer que la mise en œuvre du mécanisme de la concurrence permet de retrouver "pratiquement" la solution d'équilibre déterminée théoriquement par l'intermédiaire des équations, Walras a mis en correspondance les phases de ce mécanisme - l'enchère et le rabais - avec une méthode mathématique de résolution d'équation. Ce faisant, les agents agissent comme s'ils résolvaient "par tâtonnements" les équations d'équilibre. La méthode reprise par Walras est celle formulée à la fin du XVIII^{ème} siècle par le mathématicien Joseph Louis Lagrange.

Le 26 mars 1795 (le 6 germinal de l'an III), Lagrange donnait à l'Ecole Normale une leçon intitulée "résolution numérique des équations". Cette méthode permet de trouver les racines d'une équation à une inconnue. Elle regroupe les deux membres d'une équation (P et Q) afin d'obtenir une expression égale à zéro. Ce faisant, on peut faire varier l'inconnue (x) afin de trouver la valeur qui annule l'expression. Lagrange choisit ainsi deux valeurs numériques (p et q) de l'inconnue x de manière à ce que leur expression dans l'équation produise deux valeurs, l'une inférieure à zéro et l'autre supérieure à zéro. Lagrange montre qu'il existe une solution numérique qui se situe nécessairement entre ces deux bornes. Cette méthode mérite d'être rappelée ici pour notre propos :

"[r]eprésentons en général l'équation proposée par $P - Q = 0$, P étant la somme de tous les termes qui ont le signe plus, et $-Q$, la somme de tous ceux qui ont le signe moins. Supposons d'abord que les deux nombres p et q soient positifs, et que q soit plus grand que p ; si, en $x = p$, on a $P - Q < 0$, et en faisant $x = q$ on a $P - Q > 0$: il est clair que, dans le premier cas, P sera $< Q$, et que, dans le second, P sera $> Q$. Or, par la forme des quantités P et Q , qui ne contiennent que des termes positifs et des puissances entières et positives, il est évident que ces quantités augmentent nécessairement à mesure que x augmente, et qu'en faisant augmenter x par tous les degrés insensibles, depuis p jusqu'à q , elles augmenteront aussi par des degrés insensibles, mais de manière que P augmentera plus que Q , puisque de plus petite qu'elle était, elle devient la plus grande. Donc il y aura nécessairement un terme entre les deux valeurs de p et q , où P égalera Q , comme deux mobiles qu'on suppose parcourir une même ligne dans le même sens, et qui, partant à la fois de deux points différents, arrivent en même temps à deux autres points, mais de manière que celui qui était d'abord en arrière se trouve ensuite plus avancé que l'autre, doivent nécessairement se rencontrer dans leur chemin. Cette valeur de x , qui rendra P égal à Q , sera donc une des racines de l'équation, et tombera entre les valeurs p et q " (Lagrange, *résolution numérique des équations*, 3^{ème} édition 1826, reproduit dans Rashed [1984], p. 69).

Lagrange inaugurerait ainsi une méthode permettant de résoudre numériquement, à défaut d'une résolution directe, des équations de degré multiple. On peut également se servir de cette méthode pour résoudre des équations du premier degré. Mais, du point de vue d'un mathématicien, il est inutile d'y avoir recours puisqu'il existe des méthodes qui résolvent directement ce type d'équation. La méthode de Lagrange tentait donc de contourner l'obstacle d'une résolution directe d'équations de degré quelconque (Dahan-Dalmedico et Peiffer [1982], p. 113).

Selon Lotter, ce type de méthode, qui permet la recherche des racines d'une équation par approximation successives, était qualifié en mathématiques de "méthode du tâtonnement" (Lotter [1985], p. 122). Elle revient à 1/ former une équation regroupant d'un côté les "termes positifs" de cette équation et, de l'autre, les "termes négatifs"; 2/ faire évoluer en sens inverse ces deux composantes de l'équation afin de démontrer qu'il existe une valeur prise par leur variable commune qui les égalise; 3/ parvenir, par une série de tâtonnements, à déterminer numériquement cette solution grâce au seul signe que prend la valeur réponse.

Walras s'inspire de cette méthode, comme nous allons le voir, pour montrer que le mécanisme de la hausse et de la baisse permet de résoudre "pratiquement" les équations d'offre et de demande.

La première référence explicite aux "tâtonnements" décrits par les marchés pour parvenir à l'équilibre se fait dans la 12^{ème} leçon⁹. Après avoir déterminé mathématiquement, dans la 11^{ème} leçon, la solution du problème théorique de "l'échange de plusieurs marchandises entre elles", Walras soulève la question de savoir si cette solution théorique est également celle que l'on obtient "pratiquement" sur le marché.

"Voilà comment les équations de demande étant données, les prix en résultent mathématiquement. Reste seulement à montrer, et c'est là le point essentiel, que ce même problème de l'échange dont nous venons de fournir la solution théorique est

aussi celui qui se résout pratiquement sur le marché par le mécanisme de la libre concurrence" (Walras [1889] in [1988], § 116, p. 173).

En d'autres termes, il s'agit de voir si le résultat des calculs théoriques effectués par Walras correspond à la solution que produit "pratiquement" le marché. Il s'agit donc de deux problèmes identiques, mais que l'on résout de deux manières différentes. Le premier peut être résolu par un théoricien, alors que le second se résout spontanément, par l'action des demandeurs et offreurs qui "se fait après réflexion, sans calcul, mais exactement comme cela se ferait par le calcul" (Walras [1874] in [1988], § 126, p. 188). Cette seconde méthode doit alors résoudre "pratiquement" un problème mathématique. Pour cela, Walras doit montrer que le mécanisme de la libre concurrence, ou "de la hausse et de la baisse", engendre des comportements qui correspondent aux phases d'une méthode mathématique de résolution du problème.

"Que faut-il donc prouver pour établir que la solution théorique et la solution du marché sont identiques ? Tout simplement que la hausse et la baisse sont un *mode de résolution par tâtonnement du système des équations* d'égalité de l'offre et de la demande" (Walras [1889] in [1988], § 125, p. 189, nos italiques).

Il nous faut donc montrer que le mécanisme économique de la concurrence correspond à une méthode mathématique de résolution de systèmes d'équations. En nous restreignant ici au seul cadre de l'échange, nous allons voir que la méthode retenue par Walras s'apparente à celle décrite par Lagrange. Nous présenterons les trois étapes suivies par Walras pour s'y conformer. Ce faisant, nous verrons comment ce dernier démontre que le système de prix trouvé par le théoricien est le même que celui qui se détermine "empiriquement" sur les marchés.

L'objectif de Walras consiste à démontrer que les tâtonnements décrits par le mécanisme de la concurrence déterminent "pratiquement" les prix et solutions d'équilibres. Pour cela, Walras va se conformer scrupuleusement à la méthode de Lagrange.

- Pour respecter la première phase de la méthode de Lagrange, Walras pose d'abord le problème dans son ensemble, pour lui donner ensuite une forme susceptible d'être résolue par cette méthode. Dans son ensemble, l'ensemble des marchés peut être appréhendé par l'équation

$$X' + Y' p'_b + Z' p'_c + W' p'_d + \dots = 0$$

qui, en appelant $D'_a, D'_b, D'_c, D'_d \dots$ la somme des $x, y, z, w \dots$ positifs et $O'_a, O'_b, O'_c, O'_d \dots$ la somme des $x, y, z, w \dots$ négatifs pris positivement correspondant aux prix $p'_b, p'_c, p'_d \dots$ peut être mise sous la forme

$$D'_a - O'_a + (D'_b - O'_b)p'_b + (D'_c - O'_c)p'_c + (D'_d - O'_d)p'_d + \dots = 0 \text{ (Walras [1889] in [1988], § 126, p. 191).}$$

Dans cette équation, Walras met en évidence que chaque bien considéré comporte des quantités demandées (qu'il exprime par un terme positif) et des quantités offertes (désignées

par un terme négatif). Ces différences entre demande et offre sont exprimées en valeurs, puisque multipliées par leur prix. Ainsi tous les marchés considérés peuvent être analysés sous l'angle de ce partage. Il permet de voir que sur certains marchés, les quantités positives sont supérieures aux quantités négatives, et réciproquement sur d'autres. Ce déséquilibre justifie d'ailleurs l'examen de la procédure par laquelle les marchés parviennent à une situation d'équilibre.

Mais comment l'aborder ? Walras est en présence d'un système d'équations à plusieurs inconnues alors que la méthode itérative proposée par Lagrange ne permet de déterminer numériquement qu'une seule équation à une inconnue. Pour se ramener à cette configuration, Walras se propose de distinguer des "phases partielles du tâtonnement général" :

"la supposition de la fixité des prix des autres marchandises est une supposition essentiellement momentanée et provisoire qui n'intervient que pour une phase partielle du tâtonnement général et fait place à la supposition de la variation de ces prix dans les autres phases" (Jaffé [1965], L. 1200 de Walras à Pareto du 8/01/1895).

Il s'agit, de son propre aveu, d'un découpage motivé par "les besoins de l'analyse", c'est-à-dire, par les contraintes de la seule méthode de résolution numérique que connaisse Walras.

"Reprenez encore les tâtonnements que je vous présente ainsi successivement pour les besoins de l'analyse comme s'opérant simultanément sur le marché, n'avez-vous pas exactement dans son ensemble le fait de la détermination des prix de plusieurs marchandises sous l'empire de la libre concurrence ?" (Jaffé [1965], l. 913 de Walras à Pantaleoni du 02/09/1889).

La résolution par tâtonnement des équations du système économique doit donc se faire marché par marché, quitte à imaginer par la suite une résolution simultanée pour avoir une représentation exacte de la détermination des prix sous l'empire de la libre concurrence.

Grâce à ce procédé théorique, Walras peut exposer la première phase de la méthode de Lagrange consistant à regrouper d'un côté les termes positifs de la première équation et, de l'autre les termes négatifs. Implicitement, ce procédé est réutilisé pour chaque marché, même si Walras ne l'expose qu'une seule fois.

"Maintenant prenons l'inégalité

$$F_b(p'_b, p'_c, p'_d \dots) \geq 0,$$

et mettons-la sous la forme

$$\Delta_b(p'_b, p'_c, p'_d \dots) \geq \Omega_b(p'_b, p'_c, p'_d \dots),$$

la fonction Δ_b représentant la somme des y positifs, soit D_b , et la fonction Ω_b la somme des y négatifs pris positivement, soit O_b . Faisons abstraction de $p_c, p_d \dots$ et cherchons, ces prix étant supposés déterminés, et p_b restant seul à déterminer, comment il faut faire varier p_b entre 0 et l'infini pour que la demande de (B) soit égale à l'offre" (Walras [1889] in [1988], § 127, p. 191).

Ainsi, en faisant abstraction des prix $p_c, p_d \dots$, Walras ramène la demande nette du bien (B) à une équation ne comportant qu'une seule inconnue, le prix p_b (Walras [1889] in [1988], § 155, p. 241)¹⁰. Ce faisant, il peut isoler les termes "positifs" du bien (B) (la fonction de demande $D_b(p_b)$ ou "courbe d'achat") de ses termes "négatifs pris positivement" (la fonction

d'offre $O_b(p_b)$ ou "courbe de vente") (*ibid.*). Il est donc en mesure d'aborder la deuxième étape de la méthode de Lagrange.

- La deuxième étape de cette méthode consiste à montrer que les deux composantes de la demande nette évoluent en sens inverse en fonction de la même variable¹¹. De ce fait, elles se rencontrent nécessairement pour au moins une valeur prise par cette variable. Pour le montrer, Walras examine successivement le sens de variation de la demande du bien (B) en fonction de son prix p_b , puis celui de l'offre.

L'allure de la fonction de demande et de son sens de variation est déterminée par Walras en faisant varier le prix du bien (B) entre 0 et l'infini. La courbe qui en résulte dépend de l'appréciation que font les agents de ce bien. La demande du bien (B) s'avère alors "positive pour $p_b = 0$ " (Walras [1889] in [1988], §128, p. 191). A ce prix, la demande totale de (B)

"est égale à l'excédent de l'utilité totale extensive sur la quantité totale possédée, excédent positif si la marchandise (B) est rare et fait partie de la richesse sociale" (*ibid.*, p. 193).

Lorsque p_b croît, la fonction est décroissante.

"Alors, en effet, la marchandise (B) devient de plus en plus chère par rapport aux marchandises (A), (C), (D) ...; or il est inadmissible que, dans cette hypothèse, et toutes choses restant égales d'ailleurs, sa demande augmente : elle ne peut que diminuer" (*ibid.*).

Enfin, la valeur de p_b peut être supposée suffisamment grande pour que la demande de (B) soit nulle (*ibid.*).

Le traitement de la seconde composante de la demande nette est à l'avenant. Walras montre qu'en faisant varier le prix p_b , l'offre est successivement croissante et décroissante. Lorsque $p_b = 0$, ou même lorsque ce prix dépasse quelque peu ce niveau, l'offre reste nulle. Par la suite, lorsque p_b augmente, l'offre croît, au moins dans un premier temps, avant de baisser après avoir atteint un maximum. Cet infléchissement de la courbe d'offre s'explique par la conception walrassienne de l'échange : l'offre est en effet nécessairement la contrepartie d'une demande. L'offre du bien (B) se fait en contrepartie de la demande de tous les autres biens. En raison des quantités limitées des marchandises détenues par les agents, l'offre de (B) diminue au fur et à mesure que les demandes des autres biens sont progressivement satisfaites. Finalement, l'offre de B redevient nulle lorsque son prix tend vers l'infini.

"Alors, en effet, les marchandises (A), (C), (D) ... deviennent de moins en moins chères par rapport à la marchandise (B), et les demandes de ces marchandises se produisent successivement en même temps que l'offre de (B) qui les accompagne. Mais cette offre n'augmente pas indéfiniment; elle passe par un maximum au moins, lequel ne peut être supérieur à la quantité totale possédée; puis elle diminue pour redevenir nulle si p_b devient infini, c'est-à-dire si (A), (C), (D) ... sont gratuites" (Walras [1889] in [1988], § 128, p. 193).

Ainsi, Walras montre que la fonction d'offre part de zéro, puis s'avère successivement croissante et décroissante.

Au regard de l'évolution de ces deux composantes, Walras peut légitimement espérer qu'il existe une valeur de p_b permettant d'annuler la demande nette.

"Dans ces conditions, et à moins que D_b ne devienne nul avant que O_b ait cessé de l'être, cas auquel il n'y a pas de solution, il existe une certaine valeur de p_b pour laquelle O_b et D_b sont égaux" (*ibid.*, § 129, p. 193).

Cependant, du fait de l'allure de la courbe d'offre, la rencontre entre les deux composantes de la demande nette peut se faire en plusieurs endroits, voire même ne jamais survenir (*ibid.*, § 65, p. 97).

- La troisième étape consiste à montrer comment se détermine numériquement la valeur de p_b qui annule la demande nette. Cette méthode consiste à résoudre par tâtonnements une équation à une inconnue.

"Pour trouver cette valeur, il faut augmenter p'_b si, au prix p'_b , l'on a $Y' > 0$, soit $D'_b > O'_b$, et diminuer p'_b si, au prix p'_b , l'on a $Y' < 0$, soit $O'_b > D'_b$ " (*ibid.*, § 129, p. 193).

On a là, explicitement formulé en termes mathématiques, la règle de variation du prix en fonction du signe de la demande nette. Cette règle n'est que la transposée de celle figurant dans la méthode de Lagrange. En effet, lorsque la première composante de l'équation est supérieure à la seconde, il faut faire en sorte que la nouvelle valeur prise par la variable p_b induise une diminution de la première composante (la demande), et une augmentation de la seconde (l'offre). Or, on sait, grâce à la deuxième étape, comment faire varier p_b pour obtenir ce résultat. Il suffit de proposer une valeur p'_b du prix du bien (B) qui soit, dans cette configuration de la demande nette, supérieure à la précédente p_b . On retrouve alors ici les trois configurations possibles envisagées par Walras. - Si la demande nette s'annule pour le nouveau prix, alors le marché du bien considéré se trouve à l'équilibre. Il n'y a donc plus lieu de poursuivre les tâtonnements. - Si la demande nette reste toujours excédentaire à ce nouveau prix, il faut augmenter une fois encore le prix. - Si la demande nette devient déficitaire, sa deuxième composante (l'offre) excède alors la première composante (la demande). Il faut donc faire varier le prix du bien (B) de manière à diminuer l'offre et augmenter la demande. Grâce à la deuxième étape de la méthode de Lagrange, on sait qu'il suffit de proposer une valeur p''_b de cette variable qui soit inférieure à sa valeur précédente p'_b , mais tout en étant supérieure à la première tentative p_b . Et ainsi de suite jusqu'à ce que la demande nette s'annule pour une certaine valeur prise par la variable prix.

"On obtient ainsi l'équation

$F_b(p''_b, p'_c, p'_d \dots) = 0$ " (Walras [1889] in [1988], § 129, p. 193).

La solution p''_b est donc trouvée par tâtonnement, en supposant que les autres prix restent constants durant cette phase. Les quantités échangées seront donc nécessairement égales pour

le prix d'équilibre p''_b . La méthode détermine donc simultanément un prix et une quantité d'équilibre.

Walras applique ensuite cette méthode successivement à tous les autres marchés, en ne se servant explicitement que de la troisième étape¹². Après le marché du bien (B), Walras passe à la résolution du marché (C), puis à celle du marché du bien (D), etc.

"Cette opération effectuée, la fonction $F_c(p'_b, p'_c, p'_d \dots) \geq 0$ est devenue $F_c(p''_b, p'_c, p'_d \dots) \geq 0$; mais on peut obtenir l'équation $F_c(p''_b, p''_c, p'_d \dots) = 0$, en augmentant ou diminuant p'_c suivant qu'au prix p'_c on a $Z' > 0$, soit $D'_c > O'_c$, ou $Z' < 0$, soit $O'_c > D'_c$. On obtient de même l'équation $F_d(p''_b, p''_c, p''_d \dots) = 0$; et ainsi de suite" (Walras [1889] in [1988], § 129, p. 195).

La méthode est la même : il s'agit de faire varier le prix du bien considéré en fonction du signe de la demande nette, en essayant de restreindre progressivement la fourchette des possibles. Ce faisant, marché après marché, Walras démontre que le mécanisme de la hausse et de la baisse "détermine" par tâtonnement le prix d'équilibre lorsque tous les autres prix sont supposés constants.

Après avoir trouvé successivement les racines qui sont solution de chaque équation, Walras est contraint de les remettre en cause pour une raison simple : chaque racine était calculée en supposant les autres prix constants. Or, au terme de la première série de calculs - ou itération -, tous ces prix ont changé (Walras [1896] in [1988], appendice 1, § 3, p. 698). Walras est alors obligé de procéder à une seconde itération et, en fait, à bien d'autres encore (Jaffé [1981], p. 251). Car ces itérations ne s'interrompent que lorsque toutes les demandes nettes seront nulles avec le système de prix résultant de l'itération précédente. Par conséquent, Walras est contraint de supposer que chaque itération permettra de trouver un système de prix plus proche de l'équilibre que celui atteint lors de l'itération précédente. Après une démonstration plutôt "négligente et vague" (Jaffé [1967], p. 227, n. 16) reposant sur une analyse des effets directs et indirects produits par des variations de prix sur les demandes des biens, Walras conclut à la convergence "probable" des tâtonnements vers la solution d'équilibre (Walras [1889] in [1988], § 130, p. 195)¹³.

L'adjectif "probable" trahit en fait l'impuissance de Walras à démontrer mathématiquement son propos. Cette impuissance provient de la méthode même qu'il emploie. Cette méthode, valable pour déterminer la racine d'une équation à une inconnue, ne peut être transposée à un système d'équations. Walras, conscient de l'existence de cet obstacle, tente de le contourner à l'aide d'un argument *ad hoc* : le caractère probable de la convergence des tâtonnements vers l'équilibre général¹⁴.

Ainsi, il semble clair que Walras s'est inspiré de la méthode de Lagrange pour montrer que les marchés pouvaient, en "pratique", parvenir au système de prix d'équilibre, celui-là même calculé par le théoricien.

"[P]our démontrer que des prix de marchandises [...] résultent effectivement de telles données ou conditions, il est absolument indispensable à mon sens: 1° de formuler, d'après ces données ou conditions, un système d'équations, [...], et 2° d'établir que l'enchaînement des phénomènes de la réalité constitue bien la résolution empirique de ce système d'équations. C'est ce que j'ai fait en ce qui concernait successivement l'échange, la production et la capitalisation" (Walras [1874] *in* [1988], § 370, p. 651).

Il s'agissait donc bien, dans son esprit, de trouver une méthode mathématique qu'il puisse mettre en correspondance avec le mécanisme de la concurrence.

On se souvient que la concurrence, pour Walras, s'enclenche entre les agents économiques qui se trouvent "du côté long". De fait, lorsque la demande est supérieure à l'offre, une concurrence s'instaure entre les demandeurs pour acquérir ces biens rares. Cette concurrence les conduit, d'une manière ou d'une autre, à faire augmenter le prix du bien. Inversement, lorsque l'offre surpasse la demande, une concurrence s'installe entre les vendeurs qui les amène à baisser leur prix pour pouvoir écouler leurs marchandises. Ainsi, le mécanisme de la hausse et de la baisse peut être identifié à une règle : en cas de demande nette négative, le prix diminue, et inversement dans le cas d'une demande nette positive. Or, cette règle d'ajustement est précisément celle que l'on retrouve lorsque Walras utilise la méthode de Lagrange pour résoudre les équations. Lorsque la composante "positive" de l'équation à résoudre dépasse sa composante "négative", il faut modifier la variable de manière à induire simultanément une baisse de la composante positive et une hausse de la composante négative, et inversement. De ce fait, on peut parvenir par tâtonnements à trouver la racine qui est solution de l'équation. Walras fait ainsi correspondre les tâtonnements générés par le mécanisme de la hausse et de la baisse à la méthode de Lagrange.

Pour démontrer notre propos, nous avons établi que 1/ les caractéristiques essentielles que Walras retient de la concurrence sont la hausse et la baisse du prix en fonction du signe de la demande nette, et la suspension des échanges avant l'équilibre; 2/ ces caractéristiques permettent d'identifier le mécanisme de la concurrence à une méthode mathématique dite "par tâtonnement" de résolution numérique des équations; 3/ le point de jonction entre ces caractéristiques et la méthode de Lagrange réside dans la règle de la demande nette; 4/ grâce à ce point de contact, Walras peut démontrer mathématiquement que le mécanisme de la concurrence permet d'atteindre "pratiquement" la solution déterminée théoriquement.

III. Cournot ou Seidel ?

Nous avons vu que Walras témoignait d'une connaissance, directe ou non, des écrits de Lagrange. Ce témoignage peut être corroboré. Si l'on tourne notre regard vers Cournot, on constate qu'il est le premier à avoir introduit la méthode du tâtonnement en économie. Davantage, Cournot, excellent mathématicien, connaît bien la théorie des fonctions, y compris celle de Lagrange. Nous allons donc, dans un premier temps, étudier l'hypothèse selon

laquelle Cournot se réfère à la méthode de Lagrange lors de l'analyse du comportement d'un producteur en situation de monopole. Si cette hypothèse s'avère valide, elle nous permettra de rejeter une hypothèse alternative avancée dans la littérature économique à propos du tâtonnement walrassien. Selon cette hypothèse, Walras ne se serait pas inspiré de la méthode de Lagrange, mais plutôt de celle de Gauss-Seidel. C'est ce que nous examinerons dans un second point.

LE TÂTONNEMENT EN MONOPOLE CHEZ COURNOT

Le fait est bien connu, les *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses* (1838) de Cournot marquèrent profondément Walras. Cette influence s'avère capitale pour notre démonstration. En effet, Cournot se sert implicitement de la méthode de Lagrange¹⁵ pour montrer, dans son chapitre V, comment un producteur en situation de monopole détermine la valeur maximum de son profit. Cela se fait, selon Cournot, par "tâtonnements". Selon nous, son exposé constitue la véritable matrice de la version walrassienne du tâtonnement. Pour cela, il nous faut d'abord montrer que le tâtonnement de Cournot s'apparente à la méthode de résolution numérique de Lagrange. Ensuite, nous mettrons en évidence le fait que, pour Cournot, cette méthode "pratique" permet de trouver une solution dont l'existence théorique a été au préalable démontrée.

Le terme "tâtonnement" ne se rencontre que dans le chapitre V des *Recherches*, intitulé "du monopole"¹⁶. Il apparaît dès le premier paragraphe de ce chapitre.

"Supposons, pour la commodité du langage, qu'un homme se trouve propriétaire d'une source minérale, à laquelle on vient de reconnaître des propriétés salutaires qu'aucune autre ne possède. Il pourrait sans doute fixer à 100 francs le prix du *litre* de cette eau ; mais il s'apercevrait bien vite, à la rareté des demandes, que ce n'est pas le moyen de tirer grand parti de sa propriété. Il abaissera donc successivement le prix du litre jusqu'au terme qui lui donnera le plus grand profit possible; c'est-à-dire que, si $F(p)$ désigne la loi de la demande, il finira, après divers tâtonnements, par adopter la valeur de p qui rend le produit $p F(p)$ un maximum, ou qui est déterminée par l'équation

[1] $F(p) + p F'(p) = 0$ " (Cournot [1838], § 26, p. 43).

Les "tâtonnements" désignent donc les tentatives que fait un producteur d'eau minérale en situation de monopole¹⁷ pour trouver la valeur numérique du prix qui maximise son profit ou qui annule la dérivée première de la fonction $p F(p)$. En l'absence de tout coût de production, sa fonction de profit se ramène à l'expression en valeur de la quantité qu'il "débite" à un prix p , soit son chiffre d'affaires $p F(p)$. On peut établir une série de remarques sur les tentatives de ce producteur. 1/ Le premier prix proposé par le producteur est fixé au hasard, sous réserve de prendre une valeur positive. 2/ Les prix suivants seront proposés en fonction du sens de variation de la valeur du profit. Si après avoir proposé un deuxième prix, le producteur constate que son profit augmente, il baissera une troisième fois son prix. En fonction du sens

de variation du profit qu'il obtient, le producteur déterminera le quatrième prix, etc. Cette procédure ne s'apparente pas à un "sondage" (Ménard [1982], p. 55), car les prix proposés par le producteur ne constituent pas un ensemble d'alternatives, que l'on propose simultanément aux acheteurs, mais une suite de propositions successives gouvernées par le sens de variation du profit. 3/ Du fait des baisses "successives" des prix, les "tâtonnements" du producteur s'apparentent à une méthode itérative de résolution numérique d'une équation. 4/ Les tâtonnements permettent de retrouver la valeur qui annule l'équation [1]. Cournot présente donc implicitement deux méthodes de résolution d'une même équation. La méthode employée par le producteur consiste à déterminer numériquement, par tâtonnements, la valeur qui maximise son profit, alors que la seconde, employée par le théoricien, consiste à chercher la valeur qui annule la dérivée première d'une fonction non spécifiée numériquement. On retrouve ici la distinction qu'empruntait Walras à Cournot entre l'application "théorique" des mathématiques et son application "pratique".

On comprend, à la suite de ces remarques, que la méthode proposée par Cournot constitue la véritable matrice conceptuelle du tâtonnement walrassien. On y trouve un prix fixé au hasard, des tâtonnements régis par une règle d'ajustement qui met en relation une variation du prix à une variation du profit (respectivement de la demande nette chez Walras)¹⁸, la coexistence de deux méthodes destinée à prouver que la "pratique" du producteur peut être mise en correspondance avec une méthode mathématique de résolution numérique d'une équation. Rien d'étonnant alors à ce que Walras reprenne explicitement, dans ses *Eléments*, des passages de Cournot pour décrire le comportement d'un producteur en situation de monopole. Ainsi,

"[s]i notre entrepreneur n'avait pas de frais de production, il devrait adopter, pour son produit, le prix de vente de 1 F: ce prix serait celui qui lui donnerait le plus grand bénéfice. Mais comment le trouverait-il ? Par un tâtonnement des plus simples. Adoptant d'abord les prix les plus élevés, il constaterait que la demande est nulle ou très faible, et le produit également nul ou très faible. Abaisant alors son prix de plus en plus, il verrait la demande s'élever et le produit avec elle. Il arriverait ainsi au prix de 1 F. Continuant à abaisser son prix, il verrait la demande continuer à s'élever, mais le produit commencer à baisser. Aussitôt il relèverait son prix à 1 F, et l'y maintiendrait définitivement. C'est là une opération sans difficulté et qui se fait journellement dans le commerce" (Walras [1874] in [1988], § 377, p. 661).

La proximité du tâtonnement de Walras avec celui de Cournot est d'autant plus frappante que l'on trouve, dans le chapitre IV des *Recherches*, une démonstration similaire à celle de Walras, visant à établir que l'on peut déterminer par deux méthodes distinctes (théorique et numérique) la valeur de p qui maximise le profit du producteur. La démonstration de Cournot s'établit alors en deux temps.

Le premier moment consiste à montrer qu'il existe nécessairement, "théoriquement", une valeur qui rend le produit $p F(p)$ maximum. Pour le montrer, Cournot cherche à conserver

le maximum de généralité à son propos. Dans cette optique, dit-il, il n'est pas nécessaire de préciser numériquement cette fonction :

"cette extrême précision ne deviendrait nécessaire que si l'on pouvait se proposer de passer à des applications numériques, et elle demeure superflue dans les recherches qui n'ont pour objet que d'obtenir une expression générale des résultats moyens, indépendants des oscillations périodiques" (Cournot [1838], § 23, p. 40).

En refusant de spécifier numériquement la fonction qu'il étudie, Cournot procède à l' "analyse" mathématique de cette fonction, conformément aux méthodes de Cauchy et de Dirichlet¹⁹.

"On sait que l'une des fonctions les plus importantes de l'analyse consiste précisément à assigner des relations déterminées entre des quantités dont les valeurs numériques et même les formes algébriques sont absolument inassignables" (*ibid.*, p 37.).

Ainsi, la fonction $p F(p)$ peut être caractérisée "par la pensée" (*ibid.*). Après avoir rappelé que cette fonction est nécessairement continue, Cournot fait varier p de zéro jusqu'à l'infini afin de caractériser l'allure générale de la fonction. Du fait de son allure, la fonction comporte au moins un extremum :

"puisque la fonction $pF(p)$ va d'abord en croissant avec p , puis finalement en décroissant, il y a une valeur de p qui la rend un maximum, et qui est donnée par l'équation [1] $F(p) + p F'(p) = 0$, F' désignant, suivant la notation de Lagrange, le coefficient différentiel de la fonction F " (Cournot [1838], § 23, p. 40).

Au-delà du fait que Cournot se réfère à Lagrange²⁰ et qu'il s'agit du seul mathématicien cité dans ses *Recherches*, ce passage est important puisqu'il démontre analytiquement l'existence d'une valeur prise par p qui annule [1]. En d'autres termes, Cournot démontre l'existence théorique d'une solution à l'équation [1].

Le deuxième temps de sa démonstration consiste à montrer qu'un théoricien peut déterminer numériquement cette solution en se servant des statistiques. Pour cela, il lui faut au préalable assigner des valeurs numériques à la fonction $pF(p)$. Grâce aux statistiques, soutient Cournot, on peut constituer "une table où l'on trouverait ces valeurs" (Cournot [1838], § 24, p. 41). Par là même, on "prépare(r) la solution *pratique* et *rigoureuse* des questions qui se rattachent à la théorie des richesses" (*ibid.*, nos italiques). En d'autres termes, on rend possible sa résolution *numérique* par la méthode *mathématique* des tâtonnements qu'il exposera dans le chapitre suivant²¹. Mais Cournot n'en est pas encore là. Il lui faut, avant, montrer qu'un théoricien, par opposition au producteur, peut déterminer numériquement la valeur qui rend le débit maximum. Là réside le deuxième moment de la démonstration de Cournot. Comme on l'a vu, cette méthode utilisée par le producteur dans le chapitre V consiste à faire varier numériquement p afin d'examiner son effet sur le "produit" $p F(p)$. Pour Cournot, il s'agit de démontrer que cette procédure permet d'atteindre la solution dont il a pointé l'existence théorique.

"Supposons que le prix étant devenu $p + \Delta p$, la consommation annuelle, accusée par des documents statistiques tels que les registres des douanes, soit devenue $D - \Delta D$, selon que l'on aura

$$[2] \quad \frac{\Delta D}{\Delta p} < \frac{D}{p}, \text{ ou } \frac{\Delta D}{\Delta p} > \frac{D}{p},$$

l'accroissement de prix Δp fera augmenter ou diminuer le produit $p F(p)$ " (Cournot [1838], § 24, p. 41).

Cournot montre ainsi que l'on peut déterminer, de manière univoque, le sens de variation du produit en fonction d'une variation du prix. En effet, selon que l'on se situe dans la phase croissante du produit ($\Delta D/\Delta p < D/p$), ou dans sa phase décroissante ($\Delta D/\Delta p > D/p$), une augmentation du prix induira un accroissement ou une diminution du produit²². Cet effet s'inverse en cas de diminution du prix. Du fait de cette typologie des effets, on peut établir un diagnostic précis de la situation du marché à partir des données statistiques. Le sens de variation du produit permet de savoir si le nouveau prix se rapproche ou s'éloigne du prix qui rend le produit $pF(p)$ maximum. Ainsi,

"l'on saura conséquemment si les deux valeurs $p, p + \Delta p$ (Δp étant censé une petite fraction de p) tombent en-deça ou au-delà de la valeur qui porte au maximum le produit en question" (*ibid.*).

Ce faisant, Cournot démontre que l'on peut déterminer numériquement, grâce à la connaissance de la typologie des effets d'une variation du prix, la valeur de p qui rend le produit maximum.

Ayant fondé ces deux moments de sa démonstration, Cournot peut alors logiquement soutenir, dans le chapitre V de ses *Recherches*, que le producteur parvient à trouver le produit maximum lorsqu'il suit, sans le savoir, une méthode de résolution numérique par tâtonnements²³. On retrouve là les deux moments utilisés par Walras pour démontrer que la solution "théorique" est celle-là même qui se détermine "pratiquement" par le mécanisme de la libre concurrence. Mais, à la différence de Walras, le point de jonction entre les tâtonnements et la méthode de Lagrange n'est plus la règle de la demande nette, mais celle du sens de variation du profit ou, par une analogie trompeuse, du "profit net".

Le tâtonnement de Cournot constitue ainsi la véritable matrice conceptuelle du tâtonnement de Walras. En ne citant le nom que d'un seul mathématicien, Joseph Louis Lagrange, Cournot reconnaît implicitement une dette à l'égard de ses méthodes mathématiques. L'adoption par Cournot de la méthode de Lagrange corrobore donc notre démonstration.

ET LA METHODE DE GAUSS-SEIDEL ?

Certains exégètes walrassien ont identifié le tâtonnement à une autre méthode mathématique : la méthode de Gauss-Seidel. Il s'agit d'une méthode itérative de résolution numérique d'un système d'équations²⁴. Contrairement à la méthode de Lagrange, qui n'est valable que pour une seule équation à une inconnue, la méthode élaborée par Seidel [1874], en

s'inspirant des travaux de Gauss, permet de résoudre des systèmes d'équations linéaires selon une procédure apparemment analogue à celle employée par Walras.

Uzawa, dans un article daté de 1960, est le premier à identifier le tâtonnement walrassien à la méthode de Gauss-Seidel (Uzawa [1960], p. 186, n. 1)²⁵. Pour comprendre cette identification, il faut brièvement revenir sur les motivations d'Uzawa. A cette époque, les premières démonstrations de la stabilité de l'équilibre général venaient juste d'être établies par Arrow et Hurwicz (1958), et Arrow, Block et Hurwicz (1959). Ces démonstrations reposent toutes sur l'hypothèse d'un ajustement simultané des marchés. Souhaitant relâcher cette hypothèse, Uzawa propose d'examiner un processus d'ajustement qui ne soit plus simultané mais "séquentiel" ou "successif". Or, soutient-il, il se trouve que le concepteur du tâtonnement a développé une représentation séquentielle du processus d'ajustement. C'est donc pour étudier la convergence de ce type d'ajustement qu'Uzawa identifie le deuxième type de tâtonnement à la méthode de Gauss-Seidel.

Après avoir montré que Walras annule successivement la demande nette de chaque marché en faisant varier le seul prix du bien considéré, Uzawa propose une formulation mathématique de cet ajustement. Ainsi, si l'on désigne par z_j la demande nette pour la marchandise j ,

"[e]n général, le prix $p_j(t+1)$ de la marchandise j dans la phase $t+1$ est déterminée de manière à satisfaire l'équation

$$z_j[p_1(t+1), \dots, p_{j-1}(t+1), p_j(t+1), p_{j+1}(t), \dots, p_n(t)] = 0,$$

$$t = 0, 1, 2, \dots; j = 1, \dots, n \text{ (Uzawa [1960], p 186).}$$

Ce faisant, Uzawa peut identifier le tâtonnement de Walras à la procédure de Gauss-Seidel, qui suppose explicitement une datation des variables en fonction des itérations²⁶. Si l'on considère que les prix ne peuvent être négatifs, l'équation devient :

" $p_j(t+1)$ est déterminé de manière à satisfaire la relation

$$(6) \quad z_j[p_1(t+1), \dots, p_{j-1}(t+1), p_j(t+1), p_{j+1}(t), \dots, p_n(t)] \begin{cases} = 0, \text{ si } p_j(t+1) > 0, \\ \leq 0, \text{ si } p_j(t+1) = 0, \end{cases}$$

$$t = 0, 1, 2, \dots; j = 1, \dots, n \text{ (ibid.).}$$

Selon cette méthode, le commissaire priseur se concentre sur un marché à la fois, à chaque étape t du processus séquentiel. Cela signifie deux choses :

"premièrement, si le système n'est pas à l'équilibre à l'instant t , alors dans l'intervalle de temps qui mène à $t+1$, un seul prix est modifié. Deuxièmement, si le $i^{\text{ème}}$ prix doit être modifié, alors le commissaire priseur le modifie de manière à ce que le $i^{\text{ème}}$ marché soit à l'équilibre, les autres prix étant donnés" (Arrow et Hahn [1971], p. 305)²⁷.

Grâce à cette formulation, le tâtonnement engendre un processus dynamique dont chaque moment est déterminé dans le temps. Uzawa peut donc appliquer la théorie mathématique des

processus dynamiques pour étudier la convergence dans le temps de ce "processus de tâtonnements successifs"²⁸.

Si nous ne contestons évidemment pas la légitimité de la démarche théorique d'Uzawa²⁹, ni de la pertinence d'une mise en correspondance entre la méthode de Gauss-Seidel et le tâtonnement de Walras, nous doutons en revanche que ce dernier ait eu connaissance d'une telle méthode et ce pour les raisons suivantes. 1/ Il semble douteux que Walras, piètre mathématicien, ait pu avoir connaissance d'un texte paru dans une revue allemande, éditée en Bavière la même année que la publication de la première partie de ses *Eléments*³⁰. De plus, contrairement à Lagrange, les noms de Gauss et *a fortiori* de Seidel ne sont jamais mentionnés, à notre connaissance, par Walras. 2/ Si Walras utilise la méthode du pivot de Gauss, elle n'intervient pas dans le strict cadre de sa théorie du tâtonnement. 3/ Si Walras avait eu connaissance de la méthode de Gauss-Seidel, il n'aurait pas rencontré les difficultés, évoquées plus haut, pour démontrer la convergence du tâtonnement vers un système de prix d'équilibre. En effet, comme le relève Uzawa, Seidel assortissait l'utilisation de sa méthode de conditions restrictives. Ainsi,

"[I]l est envisagé par Seidel est celui dans lequel $z(p)$ est linéaire, $[\partial z_i / \partial p_j]_{i,j}$ est symétrique, et les $\partial z_i / \partial p_i$ sont toutes positives" (Uzawa [1960], p. 186, n. 1).

En d'autres termes, la matrice des dérivées premières doit être symétrique et sa diagonale partout positive. Or ces conditions garantissent la convergence du tâtonnement vers la solution d'équilibre. Walras n'aurait donc eu aucun mal à reprendre ces conditions ou, à défaut, à mentionner leur existence. Par conséquent, du seul point de vue de l'exégèse walrassienne, ces trois arguments écartent tout rapprochement du tâtonnement de Walras avec la méthode de Gauss-Seidel.

Conclusion

Pour démontrer notre hypothèse, notre argumentation s'est appuyée sur sept points. 1/ Les caractéristiques essentielles que Walras retient de la concurrence sont la hausse et la baisse du prix en fonction du signe de la demande nette, ainsi que la suspension des échanges avant l'équilibre. 2/ Ces caractéristiques permettent d'identifier le mécanisme de la concurrence à une méthode mathématique dite "par tâtonnement" de résolution numérique des équations. 3/ Le point de jonction entre ces caractéristiques et la méthode de Lagrange réside dans la règle de la demande nette. 4/ Grâce à ce point de contact, Walras peut démontrer mathématiquement que le mécanisme de la concurrence permet d'atteindre "pratiquement" la solution déterminée théoriquement. 5/ Walras suit le chemin emprunté par Cournot pour établir sa démonstration. 6/ Par l'emploi commun de la méthode de Lagrange, le tâtonnement de Cournot et celui de Walras ont la même structure, même s'ils reposent sur des règles d'ajustement différentes. 7/ Ne pouvant pas connaître les travaux de Seidel, Walras n'a pas utilisé la méthode de Gauss-Seidel pour son tâtonnement.

Ainsi, contrairement à ce que soutient Walker, le tâtonnement a une dimension mathématique. Bortkiewicz est peut-être le seul contemporain de Walras à l'avoir clairement compris. En répondant à Edgeworth, il écrivait ainsi, à propos du tâtonnement de Walras :

"[c]ertes, il peut y avoir plus d'une méthode pour résoudre un système d'équations données. Mais nous n'avons pas, dans le cas présent, un problème d'algèbre devant nous; il s'agit plutôt de montrer quel est le procédé *réel*, effectivement employé sur le marché, qui constitue le mode de résolution des équations données. Y aurait-il peut être d'après Mr. Edgeworth, un autre phénomène économique se produisant sur le marché et pouvant être regardé comme mode de résolution des équations en question ? Non" (Bortkiewicz [1890], p. 85).

A l'exception de Bortkiewicz et jusqu'aux travaux de Goodwin, personne ne percevra cette dimension mathématique du tâtonnement. Les principaux responsables de cette disparition sont probablement Pareto et, à sa suite, Barone, qui ne retiennent du tâtonnement que sa dimension organisationnelle. C'est d'ailleurs cette dimension qui sera à l'origine du renouveau d'intérêt que suscitera le tâtonnement dans les années trente, en Angleterre, avec le grand débat sur la rationalité d'une économie centralement planifiée.

Bibliographie

- ARENA R., RAGNI L. [1994], "Libre concurrence et méthodologie walrasienne : une tentative de mise en relation," *Æconomia, Economies et Sociétés*, Série P.E., n° 20-21, octobre-novembre 1994, pp. 161-182.
- ARROW K. J., HAHN F. H. [1971], *General Competitive Analysis*, North Holland, Amsterdam, 1971.
- BERTHOUD A. [1988], "Economie Politique et Morale chez Walras", *Æconomia, Economies et Sociétés*, Série P.E., n°9, mars 1988, pp. 65-93.
- BERTHOUD A. [1992], "Marché-rencontre et marché mécanique", *Cahiers d'économie politique*, vol. 20-21, L'Harmattan, 1992, pp. 167-186.
- BORTKIEWICZ L. v. [1890], "Revue des *Eléments d'Economie Politique Pure* de Léon Walras (1889)", *Revue d'Economie Politique*, 4 (1), janvier-février 1890, pp. 80-86.
- BRIDEL P. [1997] *Money and General Equilibrium Theory : From Walras to Pareto (1870-1923)*, Edward Elgar, Cheltenham, UK, 1997.
- COURNOT A. A. [1838], *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, Oeuvres complètes, T. VIII, Paris, Vrin, 1980.
- COURNOT A. A. [1877], *Revue sommaire des doctrines économiques*, Oeuvres complètes, T X, Paris, Vrin, 1982.
- DAHAN-DALMEDICO A., PEIFFER J. [1982], *Une histoire des mathématiques : Routes et dédales*, Paris, Seuil, coll° Points-Sciences, 1986.
- D'AUTUME A. [1982], "L'introduction du temps dans la théorie de l'équilibre général", *Cahier d'Economie Politique*, n° 7, 1982, pp. 93-127.
- DE VROEY M. [1999], "Transforming Walras into a Marshallian Economist : A Critical Review of Donald Walker's *Walras's Market Models*", *Journal of the History of Economic Thought*, 21 (4), 1999, pp. 413-435
- DUGAC P. [1978], "Fondements de l'Analyse", in Jean Dieudonné [1978], *Abrégé d'histoire des mathématiques*, 2 vol., Paris, Hermann, 2ème édition 1986, chap. VI, pp. 237-291.
- GOODWIN R.M. [1951], "Iteration, Automatic Computers and Economic Dynamics", *Metroeconomica*, 3 (1), April 1951, p. 1-7, réédité dans *Essays in Economic Dynamics*, MacMillan, 1984.
- JAFFE W. [1965], *Correspondence of Léon Walras and Related Papers*, 3 vol., Amsterdam, North-Holland, 1965.
- JAFFE W. [1967], "Walras's Theory of *Tâtonnement* : a Critique of Recent Interpretations", *Journal of Political Economy*, vol. 75, February 1967, p. 1-19, in Walker [1983], chap. 13, p. 221-243.
- JAFFE W. [1981], "Another Look at Walras's Theory of *Tâtonnement*", *History of Political Economy*, vol. 13, Summer 1981, p. 313-336.
- LALLEMENT J. [1990], "Walras et les idéaux de 1789", in G. Faccarello et Ph. Steiner (ed.), *La pensée économique pendant la révolution française*, Grenoble, Presse Universitaire de Grenoble, 1990, pp. 609-618.
- LEGRAS J. [1963], *Précis d'analyse numérique*, Paris, Dunod, 1963.
- LENDJEL E. [1997], "Le «biais empiriste» dans l'interprétation de Walker du tâtonnement walrassien", *Æconomia, Economies et Sociétés*, Série P. E., n° 26, octobre 1997, pp. 47-84.
- LENDJEL E. [1998], *Les métamorphoses du tâtonnement : une histoire de ses formalisations de Walras à Samuelson*, thèse de doctorat, Université de Paris I Panthéon-Sorbonne, 1998.
- LENDJEL E. [2000], "La Distinction entre Théorique et Pratique chez Walras : une Interprétation Mathématique", in Walker (ed.) *L'économie Walrassienne*, Actes du premier colloque de l'Association Internationale Léon Walras, *Les Cahiers du CERAS*, hors série n° 1, juin 2000, pp. 187-201.
- LOTTER F. [1985], "Léon Walras : de la mesure observée à la mesure imaginée", *Æconomia, Economies et Sociétés*, Série P.E., n° 3-4, mars 1985, pp. 109-145.
- MENARD C. [1978], *La formation d'une rationalité économique: A. A. Cournot*, Paris, Flammarion, 1978.

- NEGISHI T. [1987], "Tâtonnement and recontracting", in J. Eatwell, M. Milgate et P. Newman (eds) *The New Palgrave*, MacMillan Press, Londres, 1987, pp. 589-95.
- RASHED R. (ed.) [1984], *Essais d'histoire des mathématiques*, Paris, A. Blanchard, 1984.
- REBEYROL A. [1999] *La pensée économique de Walras*, Paris, Dunod, 1999.
- SEIDEL P. L. [1874], "Über ein Verfahren die Gleichungen, auf welche die Methoden der kleinsten Quadrate führt sowie lineare Gleichungen überhaupt durch sukzessive Annäherung aufzulösen," *Abhandlungen der bayerischen Akademie der Wissenschaften*, Math-physik. Klasse, 11, 1874, pp. 81-108.
- UZAWA H. [1960], "Walras' Tâtonnement in the Theory of Exchange", *Review of Economic Studies*, 27 (74), 1960, pp. 182-194.
- VAN DAAL J., JOLINK A., [1993], *The Equilibrium Economics of Léon Walras*, Routledge, London, 1993.
- WALKER D. A. [1983], *William Jaffé's Essays on Walras*, édité par Donald A. Walker, Cambridge University Press, 1983.
- WALKER D. A. [1987], "Walras's Theories of Tâtonnement", *Journal of Political Economy*, 95 (4), August 1987, pp. 758-774.
- WALKER D. A. [1988], "Iteration in Walras's theory of Tâtonnement", *De Economist*, 136, n°3, 1988, pp. 299-316.
- WALKER D. A. [1996], *Walras' Market Models*, Cambridge, Cambridge University Press, 1996.
- WALRAS L. [1871-1881], *Cours d'économie politique appliquée*, in Walras [1996], p. 445-714.
- WALRAS L. [1988], *Eléments d'économie politique pure ou théorie de la richesse sociale*, Edition comparée des éditions de [1874], [1889], [1896], [1900] et [1926], Œuvres économiques complètes, Vol. VIII, Paris, Economica, 1988.
- WALRAS L. [1996], *Cours*, Œuvres économiques complètes, Vol. XII, Paris, Economica, 1996.
- WELLMAN M. P. [1993], "A Market-Oriented Programming Environment and its Application to Distributed Multicommodity Flow Problems", *Journal of Artificial Intelligence Research*, 1, 1993, pp. 1-23.

* Adresse électronique : lendjel@univ-paris1.fr. Je tiens à remercier P. Bridel ainsi que les trois rapporteurs pour leurs critiques, commentaires et suggestions. Cet article n'engage, comme à l'accoutumée, que son auteur.

¹ Voir également Walras [1889] in [1988], § 125, p. 189, ou encore la lettre de Walras à F. Virgilii en date du 17-10-1889 (Jaffé [1965], L. 928).

² Pour une présentation critique des thèses de Walker, voir Lendjel [1997] et De Vroey [1999].

³ En cela, les adjectifs "pratique" ou "empirique" employés par Walras ne renvoient pas à un mécanisme "réel", comme le soutient Walker, mais bien à une représentation théorique du mécanisme de la concurrence. Pour une interprétation de cette terminologie walrassienne, voir Lendjel [2000].

⁴ Ainsi, Rebeyrol souligne que les agents se caractérisent par "des comportements **passifs du côté court** et par **des propositions actives de prix, du côté long**, plus favorables au côté court" (Rebeyrol [1999], p. 98).

⁵ Voir Berthoud [1992].

⁶ Voir Arena et Ragni [1994], pp. 166 et suivantes.

⁷ "L'enchère à la criée n'est pas absolument nécessaire, bien qu'elle constitue certainement le degré le plus parfait du mécanisme. La concurrence économique peut exister sans elle; elle existe sur le marché aux légumes, entre les boutiquiers d'une même rue, entre les avocats, médecins d'une même ville" (Walras [1871-1881], p. 456).

⁸ Voir également Rebeyrol [1999], pp. 72-74.

⁹ Ce mécanisme est déjà décrit dans les §§ 48, 60 et 61. Pour une présentation chronologique de l'application de cette méthode par Walras, voir Lendjel [1998], p. 64 et suivantes.

¹⁰ Jaffé suggère que Walras ramène temporairement son étude à "un modèle d'équilibre partiel" (Jaffé [1981], p. 250).

¹¹ Voir également Jaffé [1981], pp. 248 et suivantes.

¹² Voir également D'Autume [1982], p. 118.

¹³ Voir Rebeyrol [1999], p. 74.

¹⁴ Pour une présentation de l'argumentation de Walras et de ses changements au cours des différentes éditions, voir Lendjel [1998], pp. 60-70.

¹⁵ Jusqu'à la publication du *Cours d'Analyse* de Cauchy, en 1821, qui "ouvre la voie à l'analyse moderne", l'algèbre et les méthodes numériques de Lagrange dominaient, en France, la discipline mathématique (Dugac [1978], p. 243). Cournot, qui connaît parfaitement les mathématiques pour avoir rédigé un ouvrage sur la théorie des fonctions, maîtrise aussi bien l'algèbre que l'analyse. En se servant dès 1838 de l'analyse (et donc de fonctions non spécifiées) en économie, on mesure combien Cournot était novateur, y compris dans les mathématiques utilisées.

¹⁶ On le rencontre de nouveau en 1877, dans sa *Revue sommaire des doctrines économiques*, à propos du duopole. On remarquera que la démarche de Cournot est identique à celle de Walras, puisqu'il détermine d'abord "théoriquement", puis "pratiquement", la solution mathématique du problème. "Le système de ces deux liaisons [les fonctions de réactions] qui doivent simultanément subsister par l'effet de la concurrence des deux propriétaires M et N, est précisément ce qu'il faut pour déterminer individuellement les deux quantités m , n , et par conséquent la production totale, à laquelle correspond un prix déterminé en vertu de la loi de la demande. Dans la pratique, une suite de tâtonnements amènera les deux propriétaires ou producteurs à cette position d'équilibre, et la théorie montre que cet équilibre est stable" (Cournot [1877], p. 97).

¹⁷ Pour Cournot, comme pour Walras, le monopole doit s'employer dans son "sens le plus absolu, ce qui suppose que la production de la denrée est dans une seule main" (Cournot [1838], § 25, p. 42).

¹⁸ Signalons ici toutefois une différence entre Cournot et Walras dans leurs règles d'ajustement respective. Pour Cournot, le monopoleur modifie son prix en fonction du *sens de variation* de son bénéfice, alors que, pour Walras, le prix est modifié en fonction du signe de la demande nette.

¹⁹ Cournot se réfère à Dirichlet dans ses *Souvenirs* (Cournot [1838], p. VI). Dirichlet, en 1837, est l'un des premiers, après Cauchy, en 1821, et Poincaré, en 1814, à avoir introduit la notion de fonction en mathématiques (Dugac [1978], p. 251).

²⁰ Cournot se réfère ici à la technique développée par Lagrange de linéarisation d'une équation, qui consiste à négliger les termes non linéaires de cette équation.

²¹ Le terme utilisé n'est d'ailleurs pas sans évoquer la solution "pratique" de Walras (Walras [1874] in [1988], § 143, p. 221).

²² En reprenant l'équation [1], on peut rapidement retrouver les conditions [2] de Cournot. La dérivée première du produit $pF(p)$ est égale à $F(p) + p F'(p)$, soit $F(p) + p dF(p)/dp$. Lorsque cette expression est positive, le

produit s'accroît et inversement. Pour montrer que ces conditions renvoient à des phénomènes statistiquement mesurables, Cournot ne va retenir qu'une approximation de cette condition. De ce fait, on peut dire que, dans sa phase croissante, $F(p)/p$ sera inférieure à $\Delta F(p) / \Delta p$ et, dans sa phase décroissante, $F(p)/p$ sera supérieure à $\Delta F(p) / \Delta p$. Comme $D = F'(p)$, on retrouve les conditions [2].

²³ Cournot sait pourtant qu'une équation peut comporter plusieurs extrema, ce qui rend problématique la détermination numérique de la valeur maximale (Cournot [1838], § 25, p. 42).

²⁴ Pour une présentation simple et claire de cette méthode, voir Legras [1963], pp. 31-33.

²⁵ Voir également Arrow et Hahn [1971], pp. 305-306, D'Autume [1982], pp. 115-118.

²⁶ Cette datation existe implicitement chez Walras puisque le nombre d'apostrophes qui indexe une variable renvoie au nombre d'itérations effectuées.

²⁷ La méthode mathématique suivie par Walras pour le tâtonnement comporte la particularité, selon Arrow et Hahn [1971], p. 306, d'être peu recommandable, tant pour son incapacité à "imiter le marché" que pour résoudre les calculs de planification. C'est ce même diagnostic qui rend Walker très critique à l'égard de l'identification du tâtonnement avec la méthode de Gauss-Seidel (Walker [1988], p. 312).

²⁸ Comme le notent Arrow et Hahn ([1971], pp. 305-306), les conditions de diagonale dominante ou de substituabilité brute garantissent toutes deux la convergence de cette méthode vers l'équilibre.

²⁹ Le tâtonnement de Walras a engendré deux programmes de recherches distincts : le premier porte sur la question de la stabilité de l'équilibre (Arrow et Hahn [1971]), le second, impulsé par Goodwin [1951], a trait à la modélisation, sous la forme d'algorithmes, du comportement des marchés. Les travaux de Wellman, en particulier, témoignent de cette direction de recherche liée à ce que l'on appelle "l'intelligence artificielle" (Wellman [1993]).

³⁰ Notons que la première partie des *Eléments*, publiée en 1874, comprend l'analyse de "l'échange de plusieurs marchandises entre elles" et, par conséquent, une première utilisation de la méthode de Lagrange. Au regard du caractère précipité de la publication de cette partie, il est peu probable que Walras ait eu le temps nécessaire pour lire et intégrer l'article de Seidel.